Université Abdelmalek Essaadi. Ecole Nationale des Sciences Appliquées - Tétouan. Cycle Classes Préparatoires. 1ère année. S2. Module : Maths 3 : Analyse 2. M. Cherkaoui

Contrôle de Rattrapage. Mercredi 29 juin 2011. (Durée : 2 heures)

Bon travail et bon courage.

Exercice 1. (5 pts)

1) (2 pts) Indiquer sans démonstration, la nature des séries de termes généraux : $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{(-1)^n}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

2) (3 pts) Soit f une fonction continue, une fois continuement dérivable sur $]-1,1[$, vérifiant $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

Etudier les séries de termes généraux $u_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$

(On pourra utiliser la formule des accroissements finis)

Exercice 2 (8 pts) Soit l'équation différentielle

$$2x(1-x)y'(x) + (1-2x)y(x) = 1 \qquad \text{(E)}$$

1) (1 pt) Normaliser l'équation (E). On notera (N) la nouvelle équation.
Justifier qu'on sera amené à résoudre (N) sur chacun de ces trois intervalles : $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

2) (2,5 pts) Donner la solution générale réelle de (N_0) (Equation sans second membre)

3) (3,5 pts) Donner une solution particulière réelle de (N).

Indication :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{ax^2+bx+c}\right| & \text{si } a>0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} Arc\sin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) & \text{si } a<0. \end{cases}$$

4) (1 pt) Donner la solution générale réelle de (N).

Exercice 3. (7 pts)

Soit $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1.(2,5 pts) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2.(3,5 pts) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
(Indication. On a $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t > -1$)

3.(1 pt) En déduire la continuité de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

